Chapitre 5

Formule de Taylor et Extremums.

5.1 Formules de Taylor à l'ordre deux :

5.1.1 Dérivées partielles secondes :

Définition

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur D.
Soit $a \in D$

• Si la fonction dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ admet des dérivées partielles au point a, on les note :

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$

• De même, si la fonction dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ admet des dérivées partielles au point a, on les note :

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$$

Remarque : Les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont également appelées dérivées secondes croisées.

Exemple
Soit $f(x,y) = x^3y^2$ Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xy^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6x^2y, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x^3 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6x^2y, \end{cases}$$

Définition

Une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur D si et seulement si elle admet des dérivées secondes en tout point et si ses quatre fonctions dérivées partielles secondes sont continues sur D.
L'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathscr{C}^2$ sur D est noté $\mathscr{C}^2(D, \mathbb{R})$.

Théoréme 38 *(de Schwarz)*

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$ si $f : D \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur D alors en tout point $a \in D$, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$

Corollaire Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur D, alors pour tout $a \in D$, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$

5.1.2 Formules de Taylor à l'ordre deux :

Approximations linéaire et quadratique :

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouver D de $\mathbb{R}^2$, $a \in D$ et $h \in \mathbb{R}^2$ tel que $(a+h) \in D$

Définition 57 *(Approximations linéaire)*
On dit que f admet une approximation linéaire au voisinage de a s'il existe une application linéaire unique $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + \circ(\|h\|^2)$$

avec

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\circ(\|h\|^2)}{\|h\|^2} = 0$$

On dit que le terme $f(a)+L(h)$ est l'approché linéaire de $f(a+h)$
tel que $L(h) = \partial_x f(a) h_1 + \partial_y f(a) h_2$ avec $h = (h_1, h_2)$

Définition 58 *(Approximations quadratique)*
On dit que f admet une approximation quadratique au voisinage de a s'il existe une application linéaire unique $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et une forme quadratique $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + Q(h) + \circ(\|h\|^2)$$

avec

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\circ(\|h\|^2)}{\|h\|^2} = 0$$

On dit que le terme $f(a)+L(h)+Q(h)$ est l'approché quadratique de $f(a+h)$
tel que $Q(h) = \frac{1}{2}[\partial_{xx} f(a) h_1^2 + 2\partial_{xy} f(a) h_1 h_2 + \partial_{yy} f(a) h_2^2]$ avec $h = (h_1, h_2)$

5.1.3 Formules de Taylor :

Formule de Taylor Lagrange :

Théoréme 39 *Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$ si $f : D \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^3$ sur D, $a \in D$ et $h \in \mathbb{R}^2$ tel que $(a+h) \in D$*
Supposons que le segment géométrique $[a, a+h] \subset D$ alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que :
$f(a+h) = f(a) + \partial_x f(a) h_1 + \partial_y f(a) h_2 + \frac{1}{2}[\partial_{xx} f(a) h_1^2 + 2\partial_{xy} f(a) h_1 h_2 + \partial_{yy} f(a) h_2^2] + \frac{1}{6}[\partial_{xxx} f(a+\theta h) h_1^3 + 3\partial_{xxy} f(a+\theta h) h_1^2 h_2 + 3\partial_{xyy} f(a+\theta h) h_1 h_2^2 + \partial_{yyy} f(a+\theta h) h_2^3]$

Remarque(Puissances symboliques :)
Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$ si $f : D \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur D, avec ($k \geq 2$), $a \in D$ et $h \in \mathbb{R}^2$ on définit le réel :

$$(h_1\partial_x f + h_2\partial_y f)^{[2]}(a) = \partial_{xx} f(a)h_1^2 + 2\partial_{xy} f(a)h_1h_2 + \partial_{yy} f(a)h_2^2$$

dit une puissance symbolique d'ordre deux.

on définit la puissance symbolique d'ordre k par :

$$(h_1\partial_x f + h_2\partial_y f)^{[k]}(a) = \sum_{p=0}^{k} C_k^p h_1^p h_2^{k-p} \frac{\partial^k f}{(\partial x)^p (\partial y)^{k-p}}(a)$$

Formule de Taylor Young :

Théoréme 40 *Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$ si $f : D \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^3$ sur D, $a \in D$ et $h \in \mathbb{R}^2$ tel que $(a+h) \in D$*
Supposons que le segment géométrique $[a, a+h] \subset D$ tel que :
$f(a+h) = f(a) + \partial_x f(a)h_1 + \partial_y f(a)h_2 + \frac{1}{2}[\partial_{xx} f(a)h_1^2 + 2\partial_{xy} f(a)h_1h_2 + \partial_{yy} f(a)h_2^2] + o(\|h\|^2)$

ou

$$f(a+h) = f(a) + (h_1\partial_x f + h_2\partial_y f)(a) + \tfrac{1}{2}[h_1\partial_x f + h_2\partial_y f]^{[2]}(a) + o(\|h\|^3)$$

Remarques :

- Le terme $f(a) + (h_1\partial_x f + h_2\partial_y f)(a)$ est l'approché linéaire de $f(a+h)$

- Le terme $f(a) + (h_1\partial_x f + h_2\partial_y f)(a) + \frac{1}{2}[h_1\partial_x f + h_2\partial_y f]^{[2]}(a)$ est l'approché quadratique de $f(a+h)$

Notations de Monge.

Définition 59 *(notations de Monge).*
on définit les coefficients p, q, r, s, et t par :

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(a), \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}(a), \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), \quad et \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$$

Théoréme 41 *(Formule de Taylor-Young 'a l'ordre 2 par notations de Monge)*
Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur D. La fonction f admet un développement limité d'ordre 2 en tout point $a \in D$:

$$f(a+h) = f(a) + ph_1 + qh_2 + \frac{1}{2}(rh_1^2 + 2sh_1h_2 + th_2^2) + o(\|h\|^2)$$

avec $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$

Exemple : Donner un développement limité à l'ordre 2 en $(0,0)$ de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = e^{x\sin(y)}$$

on a $f(0,0) = 1$ et $p = q = r = t = 0$ et $s = 1$
Pour tout vecteur $h = (h_1, h_2)$, on a donc

$$f((0,0) + (h_1, h_2)) = 1 + 2h_1h_2 + o(\|h\|^2)$$

5.2 Matrice Hessienne :

Définition 60 *Soit f, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur D, ouvert de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et soita , un point de D.*
On appelle $\mathscr{H}_f(a)$, la matrice hessienne de f au point a définie par :

$$\mathscr{H}_f(a) = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a))_{(1\le i\le 2 \atop 1\le j\le 2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) \end{pmatrix}$$

PROPOSITION 39 *•, $\mathscr{H}(a)$ est une matrice symétrique.*
• On peut alors ré-écrire la formule de Taylor-Young en utilisant la matrice Hessienne. Pour $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$

$$f(a+h) = f(a) + h\nabla_f(a) + \frac{1}{2} h\mathscr{H}(a)h^t + o(\|h\|^2)$$

Exemple
Soit $f(x,y) = \frac{x-1}{y-1}$ et $a = (0,0)$
on a $f(0,0) = 1$ et $\nabla_f(x,y) = (\frac{1}{y-1}, -\frac{x-1}{(y-1)^2})$
alors $\nabla_f(0,0) = (-1,1)$
puis

$$\mathscr{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{(y-1)^2} \\ -\frac{1}{(y-1)^2} & \frac{2(x-1)}{(y-1)^3} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\mathscr{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\frac{x-1}{y-1} = 1 - x + y - xy + y^2 + o(\|(x,y)\|^2)$$

5.3 Extremums et points critiques :

5.3.1 Application à l'étude des extremums locau

Maximums et Minimums d'une fonction de deux variables :

Définition 61 *Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle de deux variables. Soit $a \in D$. On dit que :*

• On dit que f admet un maximum local en a lorsqu'il existe un disque centré en a et de rayon $r > 0$, $\mathbf{B}(a,r)$ telle que

$$\forall v \in \mathbf{B}(a,r), \quad f(v) \le f(a)$$

• On dit que f admet un minimum local en a lorsqu'il existe un disque centré en a et de rayon $r > 0$, $\mathbf{B}(a,r)$ telle que

$$\forall v \in \mathbf{B}(a,r), \quad f(v) \ge f(a)$$

• On dit que f admet un maximum global en a lorsque :

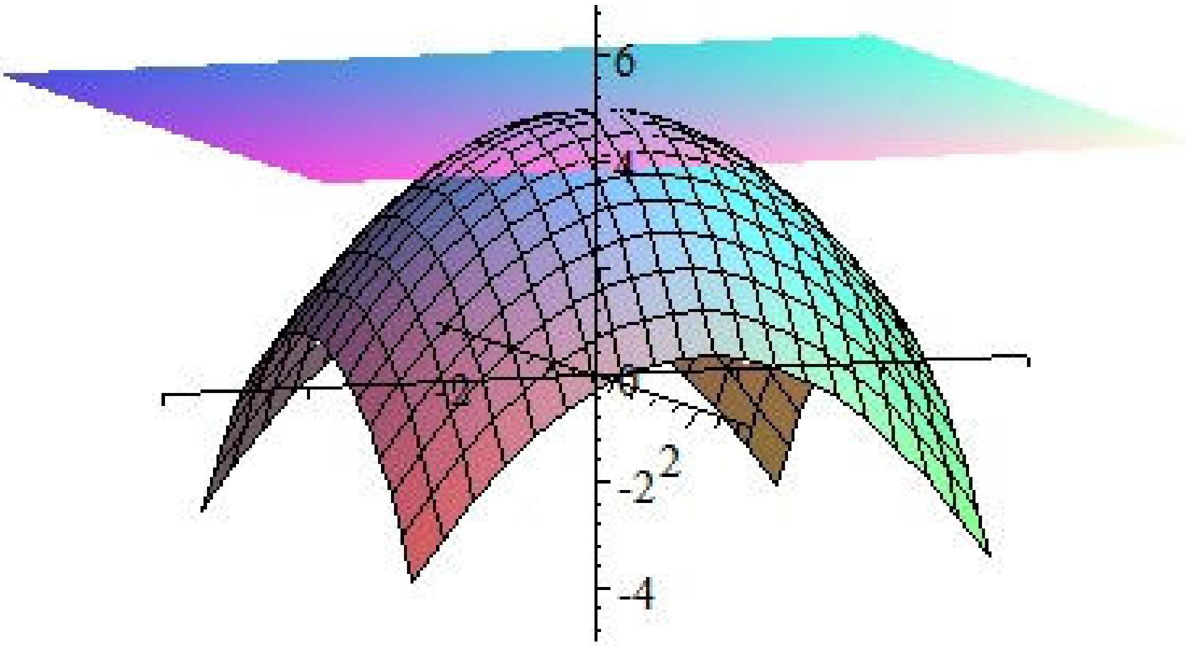
$$\forall v \in D, \quad f(v) \le f(a)$$

• *On dit que f admet un minimum global en a lorsque :*

$$\forall v \in D, \quad f(v) \geq f(a)$$

• *On dit que f admet un extremum local en a lorsque f admet en a un minimum local ou un maximum local.*
• *On dit que f admet un extremum global en a lorsque f admet en a un minimum local ou un maximum local.*

Remarque : Graphiquement, la fonction f admet un extremum local en a si la surface représentant f reste localement en dessous ou au dessus du plan d'équation $z = f(a)$



PROPOSITION 40 *(Cas d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$)*
Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction r´eelle de classe $\mathscr{C}^1$ sur D et $a \in D$
Si f admet un extremum local en a, alors son gradient en a est nul.

Remarque : Autrement dit, pour que f admet un extremum local en a, il est nécessaire (mais non suffisant) que ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ s'annulent en ce point

5.3.2 Point critique

Définition 62 *(Point critique)*
Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction r´eelle de classe $\mathscr{C}^1$ sur D et $a \in D$
On dit que a est un ***point critique*** *de f si et seulement si*

$$\nabla f(a) = 0 \qquad \textit{donc ssi} \qquad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0 \end{cases}$$

Théoréme 42 *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert D. Si f admet un extremum local en $a \in D$, alors a est un point critique de f.*

Remarque Un point critique n'est pas toujours un extremum local mais un extremum local se situe toujours en un point critique.

5.3.3 Condition suffisante d'existence d'un extremum local

1^{ére} **Méthode**

Quelques notions d'Analyse spectrale

Définition 63 *Polynôme caractéristique et valeurs propres.*
Soit M, un matrice symétrique carrée de type $n \times n$

• *On appelle polynôme caractéristique de M, le polynôme $\mathscr{P}_M$ défini par la relation :*

$$\mathscr{P}_M(X) = det(M - XI_n)$$

• *On appelle valeurs propres réelles de M les nombres réels λ racines du polynôme caractéristique de M, autrement dit les solutions de l'équation polynômiale de degré n :*

$$det(M - XI_n) = 0$$

Remarque : on notera que le degré de $\mathscr{P}_M$ est toujours la dimension de la matrice M.

Le théorème qui suit nous donne une méthode simple permettant de déterminer la nature des points critiques d'une fonction :

Théoréme 43 *Soit f, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ dans un voisinage de a.*
On appelle $\mathscr{H}(a)$, la matrice hessienne de f en a. $\mathscr{H}(a)$ est alors une matrice symétrique réelle dont les valeurs propres, nécessairement réelles sont ordonnées comme suit :$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$
On alors :

- *Si $\lambda_i > 0$ pour tout $i \in \{1,2,...,n\}$, f admet un minimum relatif en a.*
- *Si $\lambda_i < 0$ pour tout $i \in \{1,2,...,n\}$, f admet un maximum relatif en a.*
- *Si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_n > 0$, alors f n'admet pas d'extremum relatif en a.*
- *S'il existe $i \in \{1,2,...,n\}$ tel que $\lambda_i = 0$ et si $\forall j \neq i, \quad \lambda_j \geq 0 \quad$ ou $\quad \lambda_j \leq 0$, on ne peut rien conclure.*

2^{éme} **Méthode**

Cas de la dimension 2

Nous allons réécrire dans ce paragraphe tous les résultats établis précédemment appliqués au cas de la dimension 2. f désigne donc une fonction définie et de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$ et a désigne un point de D.
D'aprés Formule de Taylor-Young à l'ordre 2
Soit $a = (a_1, a_2) \in D$, Alors, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tous $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $\|(h_1, h_2)\|_2 < \eta$ on a :
$f(a+h) = f(a) + \partial_x f(a)h_1 + \partial_y f(a)h_2 + \frac{1}{2}[\partial_{xx} f(a)h_1^2 + 2\partial_{xy} f(a)h_1h_2 + \partial_{yy} f(a)h_2^2] + o(\|h\|^2)$

Soit a un point critique de f . écrivons la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en a avec **les notations de Monge** :
pour tout $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ On a

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}(rh_1^2 + 2sh_1h_2 + th_2^2) + o(\|h\|^2)$$

Ainsi, localement, lorsque $\|h\|$ est proche de 0,
le signe de $f(a+h) - f(a)$ est celui de $rh_1^2 + 2sh_1h_2 + th_2^2$
Si $r \neq 0$, on a en factorisant :

$$rh_1^2 + 2sh_1h_2 + th_2^2 = r(h_1^2 + 2\frac{s}{r}h_1h_2 + \frac{t}{r}h_2^2) = r((h_1 + \frac{s}{r}h_2)^2 + (\frac{rt-s^2}{r^2})h_2^2)$$

donc le signe de $f(a+h) - f(a)$ dépend de celui de $s^2 - rt$ et r

• Si $s^2 - rt < 0$ la quantité $(h_1 + \frac{s}{r}h_2)^2 + (\frac{rt-s^2}{r^2})h_2^2$ est positive et alors a est un extremum local de f. Plus précisément :
▷, Si $r > 0$ on a $f(a+h) - f(a) > 0$ Donc a est un minimum local de f
▷, Si $r < 0$ on a $f(a+h) - f(a) < 0$ Donc a est un maximu local de f

• Si $s^2 - rt > 0$, le sign de $f(a+h) - f(a)$ varie selon les valeurs de h_1 et h_2.
▷, Si $r \neq 0$ alors f n'admet ni maximum ni minimum local au point a. Dans ce cas,
On dit alors que a est un point selle ou point col.

▷, Si $r = 0$ et $t \neq 0$ ce cas est analogue au cas précédant.

▷, Si $r = 0$ et $t = 0$, alors f n'admet ni maximum ni minimum local au point a.

• Si $s^2 - rt = 0$, on ne peut rien conclure.

Remarque :
dans le cas où $rt - s^2 = 0$ il faut revenir à la définition d'extremum. Si a est un point col, il s'agit d'exhiber des arcs paramétrés qui démontrent que f prend des valeurs positives et négatives dans un voisinage de a.
Sinon, si a est un extremum local, il faut raisonner à l'aide d'inégalités locales.

Exemple : on considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = x^2 + y^4$$

f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de fonctions polynômiales et pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x, y) = (2x, 4y^3)$$

f n'admet donc qu'une seul point critique :$(0, 0)$
De plus $r = 2, \quad t = 0$ et $s = 0$.Donc $rt - s^2 = 0$ On ne peut rien conclure.
Cependant, on a clairement : pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) \geq 0 = f(0, 0)$ donc f admet en $(0, 0)$ un minimum global.

$3^{éme}$ **Méthode**

En utilisant la matrice Hessienne :

Soit la matrice Hessienne au point a

$$\mathcal{H}_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

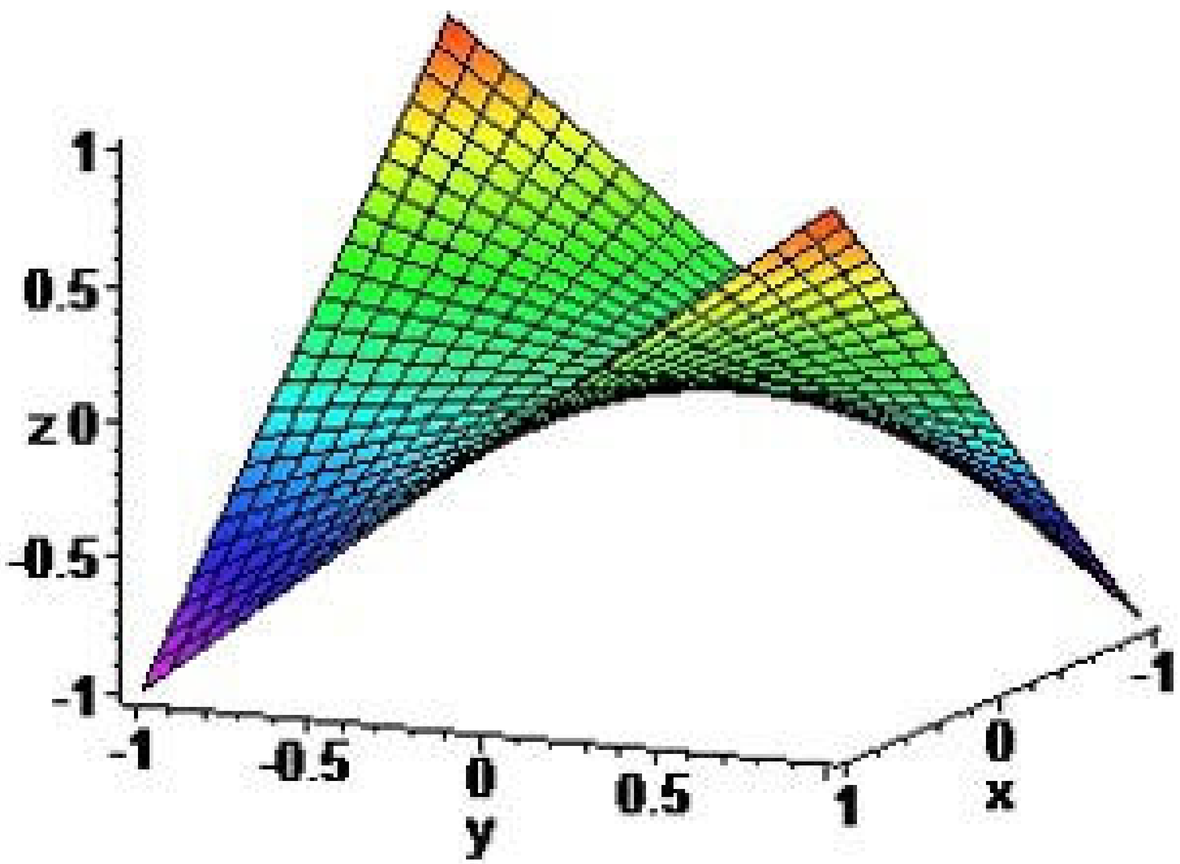
On trouve que :

- Si $\det(\mathcal{H}_f(a)) > 0$ et $r > 0$ alors a est un minimum local.
- Si $\det(\mathcal{H}_f(a)) > 0$ et $r < 0$ alors a est un maximum local.
- Si $\det(\mathcal{H}_f(a)) < 0$ alors a est un point selle.

Exemple 1 :
Etude des points critiques de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = xy$$

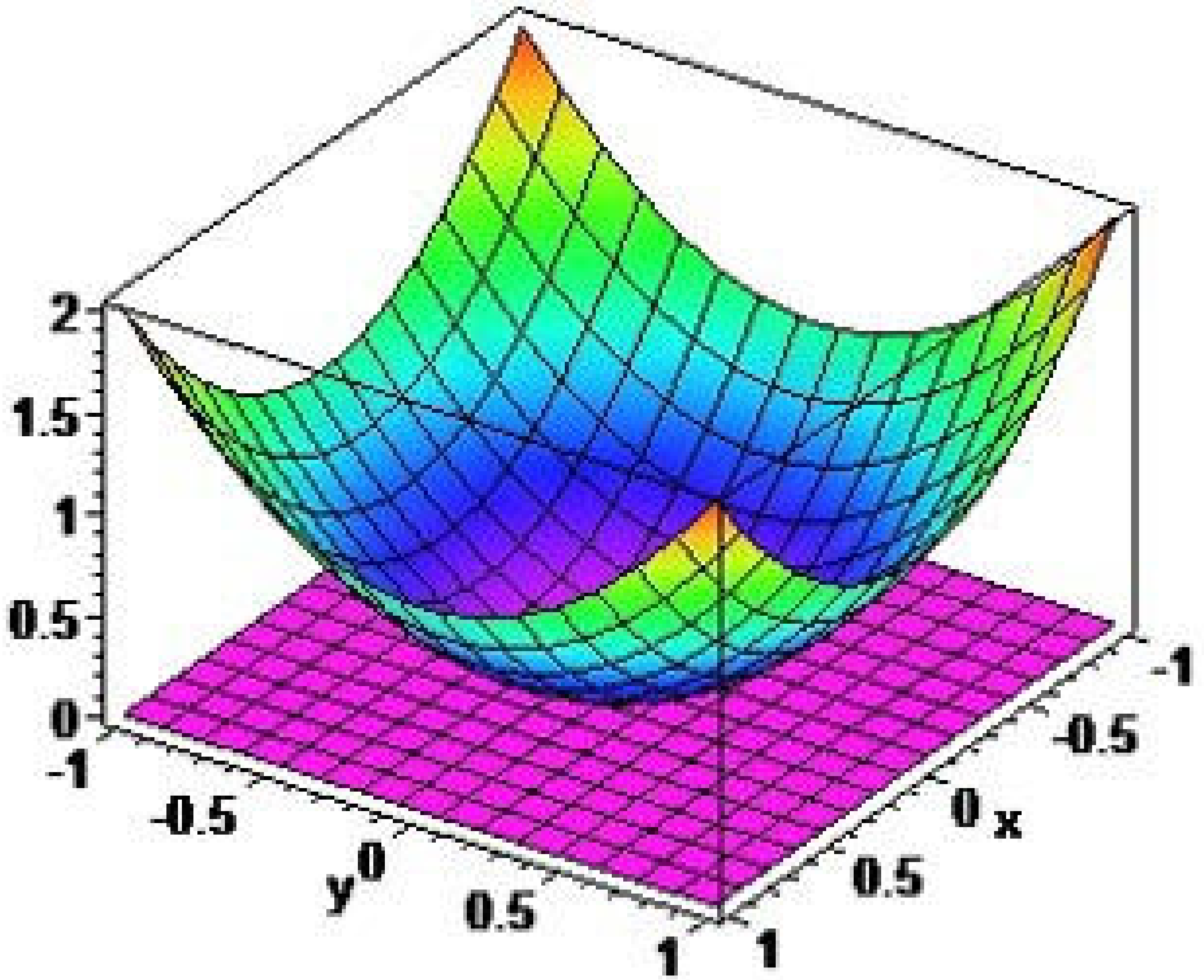
Les dérivées partielles sont $\frac{\partial f}{\partial x} = y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = x$
Donc le seul point critique est le point $(0,0)$
On calcule les dérivées secondes en $(0,0)$: $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$
Donc $s^2 - rt = 1 > 0$ c'est un point col.



Exemple 2 :
Etude des points critiques de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = x^4 + y^2$$

Les dérivées partielles sont $\frac{\partial f}{\partial x} = 2X$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2Y$
Donc le seul point critique est le point $(0,0)$
On calcule les dérivées secondes en $(0,0)$: $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$
Donc $s^2 - rt = -4 < 0$, donc c'est un extremum local.
Comme $r > 0$,Alors le point $(0,0)$ est un minimum local.



5.3.4 Points critiques des fonctions de plusieurs variables :

Définition 64 *Soit* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.
On dit que $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ *est un point critique de* f *si :*

$$\forall x \in \{1,2,...,n\} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$$

Et dans ce cas, $f(a)$ *s'appelle la valeur critique de* f *en* a.

Remarques :

1. Les points critiques de f sont les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,...,x_n) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,...,x_n) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1,...,x_n) = 0 \end{cases}$$

2. — un point critique a est un minimum local si la matrice Hessienne $\mathscr{H}(a)$ est définie positive.
   — un point critique a est un maximum local si la matrice Hessienne $\mathscr{H}(a)$ est définie négative.
   — un point critique a est un point selle si la matrice Hessienne $\mathscr{H}(a)$ est indéfinie.

Méthode de recherche d'extrema locaux sur un ouvert

Pour déterminer les extrema locaux d'une fonction f sur un ouvert Ω, on procèdera comme suit :
• on justifie que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω ;
• on calcule le gradient de f, puis on cherche les points critiques ;
• on calcule la hessienne de f en le (ou les) points critiques, puis on détermine ses valeurs propres ;ou on calcule $\Delta = s^2 - rt$ (r,s et t sont des notations de Monge)
• on identifie la nature local du point critique a à l'aide du signe des valeurs propres de la matrice Hessienne $\mathscr{H}(a)$ ou à l'aide du signe de Δ et r

Fin de Module

Bon Courage